Mr Ouni	Série nombres complexes	4M	Oct 2009

Exercice 1:

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$tel que $z' = \dfrac{z + iz\overline{z}}{1 + z\overline{z}}$. On pose $A(i)$ et $B(i)$.

1. Montrer que f admet deux points invariants que l'on déterminera.

2. Montrer que pour complexe z, les points A, M et M' sont alignés.

3. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de diamètre $[OB]$.

a) Montrer $\forall M \in \mathscr{C}_1 \setminus \{O, B\}$, on a : $\arg(z') \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}}\right)[2\pi]$.

b) En déduire que si $M \in \mathscr{C}_1 \setminus \{O, B\}$ alors M' appartient à une droite Δ que l'on précisera.

c) Donner une construction du point M' image d'un point M de $\mathscr{C}_1$.

4. Montrer que si $M \in \mathscr{C}(O, 1)$, alors $M' = A * M$. Déterminer $f(\mathscr{C}(O, 1))$.

Exercice 2:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les point A et B d'affixes respectives 1 et (-1) et on désigne par P' le plan privé du point A.

Soit f l'application de P' dans P qui à tout point M de P' d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z\left(\overline{z} - 1\right)}{z - 1}$

1. a) Montrer que $\left|z'\right| = |z|$, interpréter le résultat.

b) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que pour tout M de $\mathscr{C} \setminus \{A\}$ on a $f(M) = B$.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3 Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle $\mathscr{C}$. On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f.

a) On désigne par $z_{\overrightarrow{M_1M'}}$ et $z_{\overrightarrow{AM_1}}$ les affixes respectifs des vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$.

Montrer que $\dfrac{z_{\overrightarrow{M_1M'}}}{z_{\overrightarrow{AM_1}}} = \dfrac{\overline{z} - z}{|z - 1|^2}$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{AM_1}$ sont orthogonaux.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M'}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont orthogonaux.

c) En déduire une construction géométrique du point M'.

Exercice 3:

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et I d'affixes respectives 1, $\dfrac{1}{2}$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

1. Montrer l'équivalence suivante : $M(z) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow 2|z|^2 - (z + \overline{z}) = 0$.
On note $\mathbb{C}' = \left\{z \in \mathbb{C} / 2|z|^2 - (z + \overline{z}) \neq 0\right\}$

2. Soit f : $\begin{array}{lcl} \mathscr{P} \setminus \{\mathscr{C}\} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$ tels que $z' = \dfrac{z\left(|z|^2 - 1\right)}{2|z|^2 - (z + \overline{z})}$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}'$, on $\dfrac{z'}{z}$ est réel

b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}'$, on $z - z' = \dfrac{z|z - 1|^2}{2|z|^2 - (z + \overline{z})}$. En déduire que $|z' - z| = |z' - 1|$.

c) Construire M' connaissant M dans $\mathscr{P} \setminus \{\mathscr{C}\}$.

3. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayon r avec $r > 1$.

a) Montrer que M' est un point du segment $[OM]$.

b) En déduire que $OM' + AM' = r$.

Exercice 4:

Soit θ un réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $u = \left(1+i\sqrt{3}\right) + \left(i - \sqrt{3}\right) \mathrm{tg}\theta$.

1. Prouver que $u = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\cos\theta}\right) e^{i\theta}$. Déterminer la forme exponentielle de u.

2. On prend $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$.

a) Donner la forme algébrique de u. Ecrire u sous forme trigonométrique.

b) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 5:

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi]$.

1. On considère l'équation (E_θ) d'inconnue z : $z^2 - iz - ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$.

a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E_θ).

b) Mettre sous forme exponentielle les solutions de (E_0).

2. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $-e^{i\theta}$ et $i + e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

a) Montrer que M_1 varie sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

b) Calculer l'affixe du milieu du segment $[M_1M_2]$. Que peut-on dire de M_2.

3. Déterminer θ pour que les points O, M_1 et M_2 soient alignés.

Exercice 6:

Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_m) : $mz^2 - 2z + \overline{m} = 0$.

b) Dans la suite on prend $m = \sqrt{2}e^{i\theta}$ ou $\theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que les racines z' et z'' de l'équation (E_m) s'écrivent sous la forme : $z' = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$ et $z'' = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$

2. Dans le plan complexe on désigne par les points M', M'' et M les points d'affixes respectives z',z'' et $z' + z''$; $I = M' * M''$

a) Déterminer les ensembles décrit par M' et I

b) Montrer que les points O, M' et M'' ne sont pas alignés et que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux.

c) Montrer que le quadrilatère $OM'MM''$est un carré.

Correction

Exercice 1 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$tel que $z' = \dfrac{z + iz\overline{z}}{1 + z\overline{z}}$. On pose $A(i)$ et $B(-i)$.